



Ciências
ULisboa

Faculdade
de Ciências
da Universidade
de Lisboa

Princípios de Economia e Gestão I

Sessão 6 · Incerteza, Risco e Informação Assimétrica

Introdução



De Onde Vimos

Até aqui tudo foi **certo**: o consumidor conhecia os preços, a empresa conhecia os seus custos.

Mas quase nenhuma decisão financeira funciona assim. Hoje entram em cena a **incerteza** e a informação escondida. 🎲

Esta é a sessão mais próxima do que vais fazer de facto na banca, nos seguros e na gestão de risco. 🛡️

🇵🇹 Tradução para português dos slides em inglês. A versão de referência é a inglesa.



O Mapa de Hoje

1. 🎲 Utilidade esperada e aversão ao risco
2. 💶 Equivalente certo e prémio de risco
3. 🌫️ Informação assimétrica: seleção adversa e risco moral
4. 🛡️ Como funcionam os seguros
5. 🧳 Como as seguradoras respondem à informação assimétrica

Parte 1 · Escolha em Incerteza



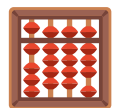
Uma Aposta

Ofereço-te uma escolha:

(A) 52 mil € **garantidos**.

(B) Atirar uma moeda ao ar: 4 mil € se sair coroa, 100 mil € se sair cara.

As duas valem **o mesmo** em média. A maior parte das pessoas escolhe (A). Porquê? 🤔



Utilidade Esperada

A resposta: as pessoas não maximizam o **valor** esperado, maximizam a **utilidade** esperada.

$$E[u(w)] = \sum_i p_i u(w_i)$$

Cada resultado w_i acontece com probabilidade p_i , e o que conta é a utilidade que dá, não o euro em si.



Primeiro, uma Ferramenta: a Desigualdade de Jensen

Precisamos de um resultado de probabilidades antes de continuar.

Desigualdade de Jensen: se u é côncava e w é uma variável aleatória, então $E[u(w)] \leq u(E[w])$. Se u é estritamente côncava e w não é constante, a desigualdade é estrita.

Com dois resultados, w_1 com probabilidade p e w_2 com $1 - p$, fica

$$p u(w_1) + (1 - p) u(w_2) \leq u(p w_1 + (1 - p) w_2),$$

que é a definição de concavidade que conheces do cálculo. Jensen estende-a a qualquer distribuição.

Para uma função **convexa** a desigualdade troca de sentido. Já conheces um caso: x^2 é convexa, logo $E[w^2] \geq (E[w])^2$, que é $\text{Var}(w) \geq 0$.



Desigualdade de Jensen: Prova

Seja $\mu = E[w]$, e suponhamos u diferenciável.

Uma função côncava fica abaixo de cada uma das suas tangentes. Pega na tangente em μ :

$$u(w) \leq u(\mu) + u'(\mu)(w - \mu) \quad \text{para todo o } w.$$

Toma o valor esperado dos dois lados. O valor esperado mantém a desigualdade, e $E[w - \mu] = 0$:

$$E[u(w)] \leq u(\mu) + u'(\mu)(E[w] - \mu) = u(\mu) = u(E[w]). \quad \blacksquare$$

Se u é estritamente côncava a desigualdade da tangente é estrita para todo o $w \neq \mu$, por isso o resultado é estrito logo que $w \neq \mu$ com probabilidade positiva.



Aversão ao Risco É Concavidade

Se u é **côncava**, cada euro adicional vale menos do que o anterior ($u'' < 0$).

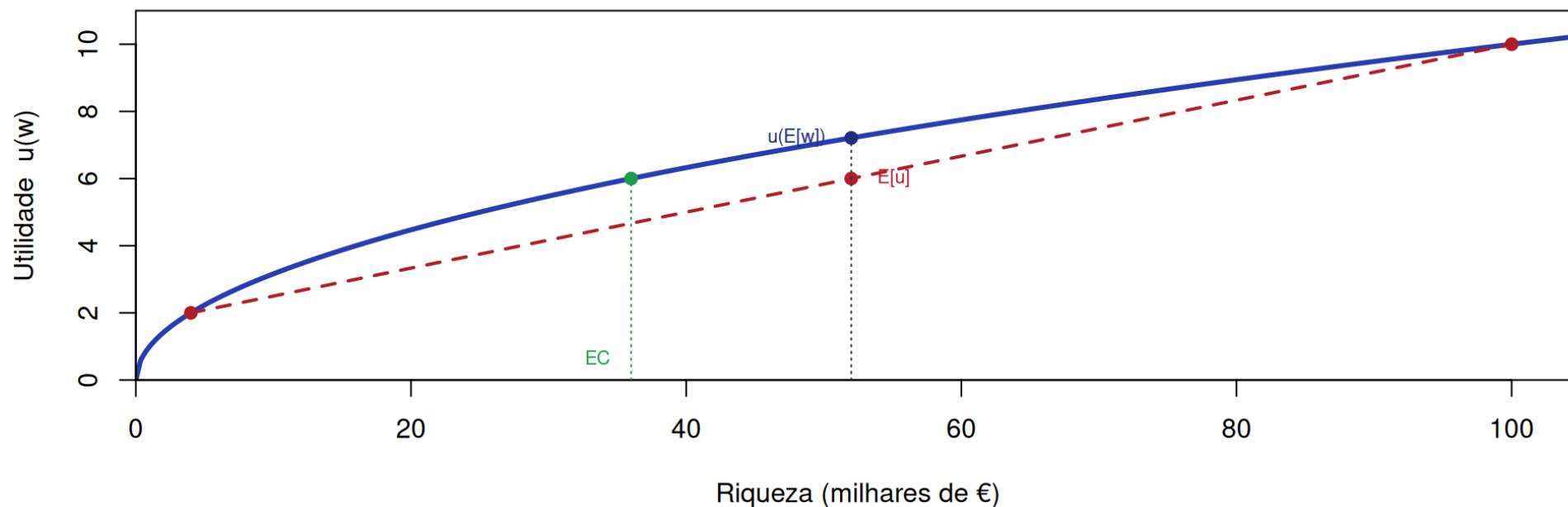
Pela desigualdade de Jensen, para qualquer aposta não degenerada:

$$E[u(w)] < u(E[w]).$$

Aversão ao risco: preferir o valor esperado garantido à aposta. É exatamente a concavidade de u .



Aversão ao Risco É Concavidade



A corda (a aposta) fica **abaixo** da curva (a certeza). Isso é concavidade.

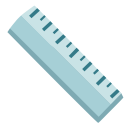


Equivalente Certo e Prémio de Risco

Equivalente certo (EC): o montante garantido que dá a mesma utilidade que a aposta, $u(EC) = E[u(w)]$.

Prémio de risco: $E[w] - EC$. É o que estás disposto a pagar para **não** suportar o risco.

E é exatamente daqui que vem a disposição a pagar por um **seguro**. 



Quão Averso ao Risco?

“Côncava” é qualitativo. A Ana e o Bruno recusam ambos o lançamento da moeda, mas a Ana pagaria mais do que o Bruno para o evitar. Como medimos isso?

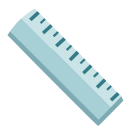
Primeira ideia: usar u'' , a rapidez com que a utilidade marginal cai. O problema é que u não é única.

Pega em $v(w) = a u(w) + b$ com $a > 0$. Então $E[v(w)] = a E[u(w)] + b$, por isso v ordena todas as apostas exatamente como u , e as duas descrevem as mesmas preferências. Mas $v'' = a u''$, por isso u'' daria um número diferente para a mesma pessoa.

Dividir por u' elimina o a , já que $v''/v' = a u''/(a u') = u''/u'$. Isto dá o coeficiente de aversão absoluta ao risco de **Arrow-Pratt**:

$$A(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

O sinal menos torna-o positivo para um agente avesso ao risco.



Arrow-Pratt: Alguns Exemplos

$u(w)$	$A(w)$	Leitura
w	0	neutro ao risco, só conta $E[w]$
$\ln w$	$1/w$	desce com a riqueza
$\frac{w^{1-\rho}}{1-\rho}, \rho > 0, \rho \neq 1$	ρ/w	desce com a riqueza
$-e^{-aw}$	a	constante

Quando $A(w)$ desce com w , uma pessoa mais rica desgosta menos da **mesma** aposta em euros. Para uma aposta de 1000 euros isto parece certo: custa muito mais a um estudante do que a um banco.

Confirma tu a terceira linha: $u' = w^{-\rho}$ e $u'' = -\rho w^{-\rho-1}$. 



O Prémio de Risco a partir de Arrow-Pratt

Escreve a aposta como $w = \mu + \varepsilon$, com $E[\varepsilon] = 0$ e $\text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2$. O prémio de risco π é definido por

$$u(\mu - \pi) = E[u(\mu + \varepsilon)].$$

Lado direito, uma expansão de Taylor de ordem dois à volta de μ , e depois o valor esperado:

$$E[u(\mu + \varepsilon)] \approx E\left[u(\mu) + u'(\mu)\varepsilon + \frac{1}{2}u''(\mu)\varepsilon^2\right] = u(\mu) + \frac{1}{2}u''(\mu)\sigma^2.$$

Lado esquerdo, chega a ordem um: $u(\mu - \pi) \approx u(\mu) - u'(\mu)\pi$.

Iguala os dois e resolve em ordem a π :

$$\pi \approx \frac{1}{2} \left(-\frac{u''(\mu)}{u'(\mu)} \right) \sigma^2 = \frac{1}{2} A(\mu) \sigma^2.$$



O Prémio de Risco a partir de Arrow-Pratt

Porquê ordem dois à direita e só ordem um à esquerda?

ε tem o tamanho de σ , e o seu termo de primeira ordem tem média zero. Por isso o primeiro termo que sobrevive ao valor esperado é o de ε^2 , do tamanho de σ^2 .

A resposta π também tem o tamanho de σ^2 . À esquerda um termo em π^2 teria o tamanho de σ^4 , muito mais pequeno quando o risco é pequeno. Por isso deixamo-lo cair.

A fórmula é para riscos **pequenos**. Exemplo com $u = \sqrt{w}$ e uma aposta 50/50 entre 64 e 144: $\mu = 104$, $\sigma = 40$. Exato: $E[u] = (8 + 12)/2 = 10$, logo $EC = 100$ e $\pi = 4$.

Aproximação: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{208} \cdot 1600 \approx 3,85$. Perto.

Logo o prémio de risco é proporcional à **variância**, e A é o fator. É uma das razões por que a variância é a medida de risco que vais encontrar em todo o lado em finanças. 



Diversificação

Se a aversão ao risco sai cara, como podemos reduzir o risco sem abdicar do retorno?

Dois ativos com a mesma média e variância σ^2 , detidos meio a meio. Se $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$:

$$\text{Var}\left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2\right) = \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}\underbrace{\text{Cov}}_{=0} = \frac{\sigma^2}{2}.$$

O mesmo retorno esperado, **metade** da variância. Com n ativos independentes, $\sigma^2/n \rightarrow 0$. 

 Fonte: OpenStax *Micro* 3e, §17.2 “How Households Supply Financial Capital”, “The Tradeoffs between Return and Risk”, que defende a diversificação sem a álgebra.



Diversificação

Acima era a independência que fazia todo o trabalho. Em geral, para n ativos com o mesmo peso:

$$\text{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{n} \overline{\sigma^2} + \frac{n-1}{n} \overline{\text{Cov}}$$

Quando $n \rightarrow \infty$ o primeiro termo desaparece e o segundo converge para $\overline{\text{Cov}}$. A variância individual pode ser eliminada pela diversificação; a **covariância média não pode**.

Esse resíduo é o **risco sistemático**: o que fica quando tudo se move junto. É por isso que uma carteira de 500 ações de bancos europeus continua a ser uma aposta na banca europeia.

? Escolha Múltipla 1

A um agente com $u(w) = \sqrt{w}$ é oferecida uma aposta justa. Ele:

A. Aceita, porque o valor esperado não muda.

B. É indiferente, porque $E[w]$ é o mesmo em ambos os casos.

C. Recusa, porque $\sqrt{\cdot}$ é côncava e Jensen dá $E[u(w)] < u(E[w])$.

D. Não consegue decidir sem saber a sua riqueza inicial.

✓ **C.** Uma aposta justa deixa a média igual e acrescenta variância, e uma u côncava não gosta de variância. Repara que D está errada aqui por uma razão concreta: o *signal* da resposta não depende da riqueza, só a sua dimensão.

? Escolha Múltipla 2

O prémio de risco é:

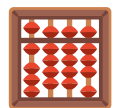
A. A diferença entre o valor esperado e o equivalente certo.

B. O preço cobrado pela seguradora.

C. Sempre igual à perda esperada.

D. Zero para qualquer agente avesso ao risco.

✓ **A.** É $E[w] - EC$: quanto o agente está disposto a abdicar, em média, para se livrar do risco. É o que torna possível a margem de uma seguradora. Não é o prémio do seguro em si.



Pergunta Numérica

Utilidade $u(w) = \sqrt{w}$, e uma aposta 50/50 entre 4 e 100 mil euros.

- a) Encontra $E[w]$ e $E[u(w)]$.
- b) Encontra o equivalente certo.
- c) Encontra o prémio de risco.
- d) Calcula $A(w)$ em $w = E[w]$ e compara $\frac{1}{2} A\sigma^2$ com a tua resposta a (c).



Solução

a) $E[w] = 0,5(4) + 0,5(100) = 52$, e $E[u] = 0,5(2) + 0,5(10) = 6$ mil euros.

b) $\sqrt{EC} = 6$, logo $EC = 36$ mil euros.

c) Prémio de risco $= 52 - 36 = 16$ mil euros. Quase um terço do valor esperado: é uma aposta muito grande.

d) $u' = \frac{1}{2}w^{-1/2}$ e $u'' = -\frac{1}{4}w^{-3/2}$, logo $A(w) = 1/(2w) = 1/104$. Com $\sigma^2 = 48^2 = 2304$: $\frac{1}{2}(2304)/104 \approx 11$. A ordem de grandeza certa, mas abaixo de 16: a aproximação é para riscos pequenos, e esta aposta é grande. 

Parte 2 · Informação Assimétrica



Informação Imperfeita

Raramente decidimos com informação perfeita.

Compras um telemóvel usado sem saber o estado real da bateria.

Informação assimétrica: quando um dos lados da transação sabe **mais** do que o outro.

O Mercado de Carros Usados

Um exemplo clássico (Akerlof). Há carros bons e “limões” (os maus). Só o **vendedor** sabe qual é qual.

O comprador, sem saber, só paga um preço **médio**.

A esse preço médio, quem tem um carro bom não vende (vale mais). Só ficam os **limões**. 

 Fonte: OpenStax *Micro* 3e, [§16.1](#) “The Problem of Imperfect Information and Asymmetric Information”, “‘Lemons’ and Other Examples of Imperfect Information”, onde o Marvin anda à procura de um carro usado. O artigo original é Akerlof (1970), “The Market for Lemons”.



Seleção Adversa

Seleção adversa: quando a informação escondida faz com que os “piores” tipos dominem o mercado.

O preço médio expulsa os bons, o que baixa ainda mais a qualidade e o preço. O mercado pode **colapsar**.

Guarda esta ideia: é exatamente o problema central dos **seguros**. 

Risco Moral

Um problema diferente, que surge **depois** de o contrato ser assinado.

Risco moral: quando alguém protegido de uma consequência muda o seu comportamento e assume mais risco.

Com o carro totalmente seguro contra roubo, talvez o deixes destrancado mais vezes. 

 Fonte: OpenStax *Micro* 3e, [§16.2](#), “The Moral Hazard Problem”; a seleção adversa vem logo a seguir, em “The Adverse Selection Problem”.



Seleção Adversa vs Risco Moral

	Quando ocorre	O problema
Seleção adversa	antes do contrato	escondes o teu tipo
Risco moral	depois do contrato	mudas o teu comportamento

Ambos nascem da informação assimétrica, mas em momentos diferentes. 🕒

Sinalização

Como se resolve a informação escondida? Um dos lados pode **sinalizar** a sua qualidade.

Um curso sinaliza competência. Uma garantia sinaliza que o carro é bom.

O sinal só funciona se for **caro de imitar** para quem não tem a qualidade.

 Fonte: OpenStax *Micro* 3e, [§16.1](#), “Mechanisms to Reduce the Risk of Imperfect Information”: garantias, reputação, referências e o resto.

? Escolha Múltipla 3

Uma seguradora oferece uma única apólice a um único preço a toda a gente. Os clientes de baixo risco saem, por isso a seguradora sobe o preço, por isso saem mais clientes. Isto é:

- A. Risco moral, já que o comportamento mudou depois do contrato.
 - B. A mutualização do risco a funcionar exatamente como previsto.
 - C. Um equilíbrio de sinalização.
 - D. Seleção adversa, porque o preço não consegue separar tipos escondidos.
- ✓ **D.** Um preço único faz a média de tipos que a seguradora não observa. É caro demais para os bons riscos e uma pechincha para os maus, por isso o conjunto de clientes piora a cada ronda. As seguradoras chamam-lhe a **espiral da morte**.

? Escolha Múltipla 4

A um agente avesso ao risco é oferecido um seguro a um prémio **atuariamente justo** (o prémio é igual à perda esperada). Ele compra:

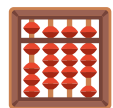
A. Nenhum seguro, já que o prémio é igual à perda esperada e não há ganho.

B. Seguro total, eliminando todo o risco.

C. Cobertura parcial, para equilibrar o prémio com o risco.

D. Uma quantidade que depende da dimensão da perda.

✓ **B.** A um preço justo, comprar cobertura tem custo esperado zero e reduz estritamente a variância, por isso uma u côncava fica com toda. A cobertura parcial (C) é o que acontece quando o prémio leva um **carregamento** acima do justo, que é o caso do mundo real.



Pergunta Numérica

Num stand, metade dos carros vale 10 000 euros (bons) e metade 4000 euros (limões). Os compradores não os conseguem distinguir, e são neutros ao risco.

- a) Qual é o máximo que um comprador paga?
- b) O que acontece aos donos dos carros bons?
- c) Qual é o novo preço de mercado depois de eles saírem?
- d) Indica uma instituição que, na prática, impede que isto aconteça.

Solução

- a) $0,5(10\,000) + 0,5(4000) = 7000$ euros.
- b) A 7000 não vendem: o carro vale mais para eles do que o mercado oferece. **Retiram-se.**
- c) Só ficam limões, os compradores percebem isso e pagam 4000. A metade boa do mercado **desapareceu**, e ninguém se comportou de forma irracional em nenhum passo. 🍋
- d) Uma garantia, uma inspeção independente, a reputação de um stand, uma certificação do fabricante. Cada uma é um **sinal** caro de falsificar, e é por isso que funciona. 

Parte 3 · Seguros



O que É um Seguro

Um seguro troca uma **perda grande e incerta** por um **custo pequeno e certo**: o prémio.

Pagas 300 € por ano para não arriscar uma perda de 20 000 € num acidente.

Porque é que estás disposto a fazer isto?

Porque és **avesso ao risco**: preferes a certeza.



A Ideia da Mutualização do Risco

A seguradora junta muitos clientes. Individualmente, o risco é imprevisível.

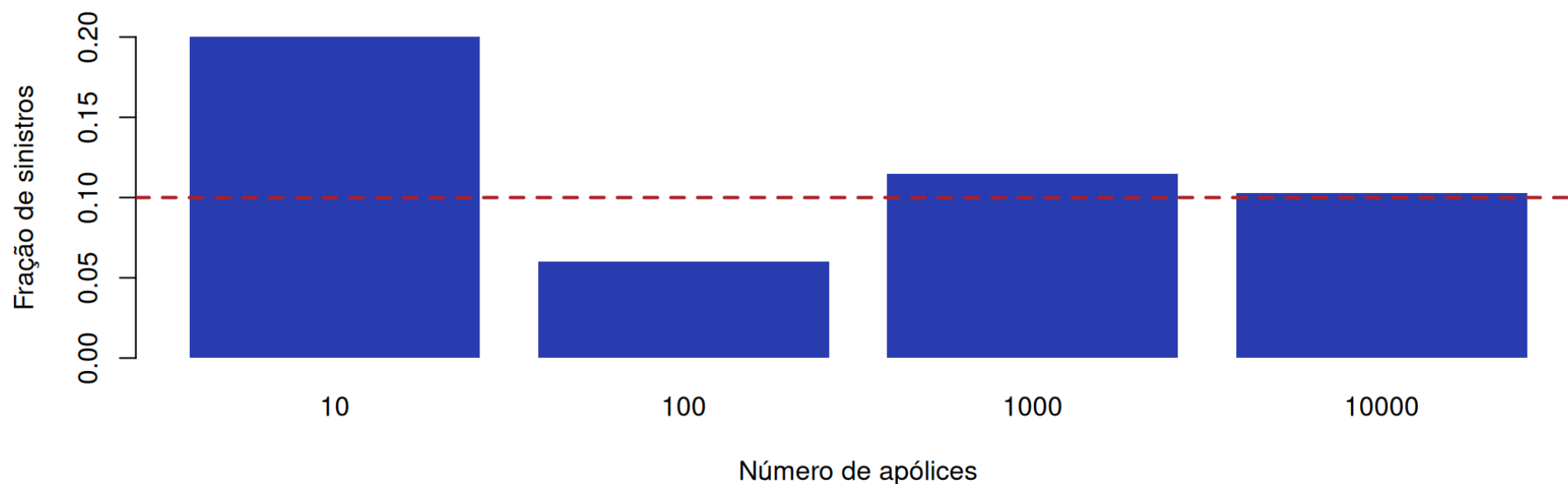
Mas ao longo de **milhares** de apólices, a fração de sinistros é **estável** e previsível.

Mutualização do risco: juntar muitos riscos independentes torna o total previsível.

 Fonte: OpenStax *Micro* 3e, [§16.2](#) “Insurance and Imperfect Information”, “How Insurance Works”, que abre com uma tabela de quem paga cada tipo de apólice e quando é que ela paga.



A Lei dos Grandes Números



Com mais apólices, a fração de sinistros aproxima-se do valor verdadeiro (10%). A linha vermelha é o risco verdadeiro.



Como se Fixa o Prémio

O prémio cobre a perda esperada mais custos e margem.

Se a probabilidade de sinistro é 2% e a perda é 20 000 €, a perda esperada é $0,02 \times 20\,000 = 400$ €.

O prémio fica um pouco acima de 400 €, para cobrir custos administrativos e margem. 

 Fonte: OpenStax *Micro* 3e, [§16.2](#), “Risk Groups and Actuarial Fairness”, que é de onde vem o termo **atuariamente justo**.



Os Dois Inimigos dos Seguros

Os problemas da Parte 2 voltam, agora do lado da seguradora:



Seleção adversa: quem sabe que é de alto risco é quem mais quer cobertura.



Risco moral: quem está seguro pode tornar-se menos cuidadoso.



Como Respondem as Seguradoras



Triagem: questionários médicos, historial de condução, idade do carro.



Franquias: o segurado paga parte da perda, o que o mantém cuidadoso (isto combate o risco moral).



Prémios diferenciados: preços por perfil de risco, para combater a seleção adversa.



Porque É que Isto Te Interessa

Gerir a informação assimétrica é o **coração** do negócio dos seguros e da banca.

Avaliar risco de crédito, fixar prémios, desenhar franquias: tudo isso é aplicar o que vimos hoje. 

? Escolha Múltipla 5

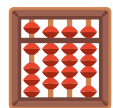
Uma seguradora cobre uma região contra cheias. A mutualização do risco funciona **mal** aqui porque:

- A. As perdas são grandes demais para se segurarem a qualquer preço.
 - B. Os segurados vão comportar-se com menos cuidado depois de cobertos.
 - C. Os riscos estão fortemente correlacionados, por isso o termo da covariância não desaparece.
 - D. A lei dos grandes números não se aplica a fenómenos naturais.
- ✓ **C.** A mutualização precisa de riscos perto de independentes. Quando uma cheia atinge todas as apólices ao mesmo tempo, $\overline{Cov}$ continua grande por muitas apólices que se façam. É exatamente o termo do risco sistemático da Parte 1, e é por isso que a cobertura de catástrofes é ressegurada ou tem garantia do Estado.

? Escolha Múltipla 6

Uma franquia, em que o segurado paga a primeira parte de qualquer sinistro, funciona sobretudo:

- A. Deixando o segurado exposto o suficiente para continuar cuidadoso.
 - B. Aumentando a receita da seguradora por apólice.
 - C. Eliminando a necessidade de fixar preços por perfil de risco.
 - D. Tornando a apólice obrigatória.
- ☒ **A.** Visa o **risco moral**, deixando parte da perda com a pessoa cujo comportamento a afeta. A triagem e os preços por risco são as ferramentas apontadas à seleção adversa.



Pergunta Numérica

A probabilidade de sinistro é de 5 por cento e a perda é de 30 000 euros.

- a) Calcula a perda esperada.
- b) A seguradora acrescenta um carregamento de 20 por cento para custos e margem. Qual é o prémio?
- c) Um cliente com $u(w) = \sqrt{w}$ e riqueza de 100 000 euros enfrenta este risco. Qual é o **máximo** que pagaria por cobertura total?
- d) Compra a apólice ao preço de (b)?

Solução

a) $0,05 \times 30\,000 = 1500$ euros.

b) $1500 \times 1,20 = 1800$ euros. Os 300 euros acima do justo são o **carregamento**.

c) $E[u] = 0,95\sqrt{100\,000} + 0,05\sqrt{70\,000} \approx 313,65$, logo $EC \approx 313,65^2 \approx 98\,373$. O máximo que pagaria é $100\,000 - EC \approx 1627$ euros.

d) **Não**. 1800 está acima do seu teto de 1627. Mas ao prémio **justo** de 1500 comprava, e comprava cobertura total, que é a pergunta 4 em números: é o carregamento que torna a cobertura recusável. 

Síntese

O que Levar desta Sessão

 A **informação assimétrica** gera seleção adversa (antes) e risco moral (depois do contrato).

 Um **seguro** troca uma perda incerta por um custo certo, e assenta na **mutualização do risco**.

 As seguradoras combatem a informação assimétrica com triagem, franquias e prémios diferenciados.

Fim do Bloco 1

A seguir vem o **Teste Intercalar**, e depois passamos à **macroeconomia**: PIB, inflação, moeda e política económica. 

Bom estudo. 